

URTO ELASTICO: VIBRAZIONI RESIDUE E COEFFICIENTE DI RESTITUZIONE

A.CUCCIO¹, R.GARZIERA¹, P.RIGHETTINI², A.TASORA²

¹ Dip. Ingegneria Industriale, Università degli Studi di Parma

² Dip. Ing. Strutturale, Politecnico di Milano

SOMMARIO

In questo lavoro viene studiato un particolare aspetto del coefficiente di restituzione, applicabile quando un corpo con elasticità intrinseca urta un bersaglio rigido e fermo. Questo coefficiente di restituzione non si scosta dall'unità a causa dalle locali inelasticità del materiale bensì a causa dell'energia che, dopo il rimbalzo, rimane intrappolata nei modi propri di vibrare. Il lavoro, oltre ad esaminare alcuni casi "limite" di notevole interesse propone anche un modello per la simulazione degli urti validato da estensive prove sperimentali.

ABSTRACT

This work's main object is the study of a restitution coefficient peculiar of some types of collisions between non-rigid bodies and a firm, rigid wall. In the particular case which this work refers to, the restitution coefficient differs from unity on the account of a fraction of the total energy being trapped, after rebound, in vibration modes. Besides examining some interesting limiting case, the present work outlines a numerical model suitable for working out the coefficient of restitution in any particular situation. The numerical model and its assumptions have been validated through an exhaustive set of experimental tests.

1. INTRODUZIONE

L'interesse pratico nello studio dei fenomeni d'urto è motivato dalla tendenza verso prestazioni sempre più elevate nelle macchine e nei meccanismi. Questo può portare ad interazioni di tipo impulsivo (di solito indesiderate) tra gli organi delle macchine quali si esplicano per esempio in presenza di giochi tra camma e cedente o tra i membri di un meccanismo articolato.

Fenomeni d'urto sono presenti anche nelle macchine che lavorano i metalli per deformazione plastica: tali manifestazioni possono essere di aiuto tutte le volte che occorrono forze intense per periodi di tempo brevi.

Il lavoro che presentiamo analizza un particolare aspetto del fenomeno d'urto tra due corpi legato al coefficiente di restituzione definito come $\eta = \frac{E_i - E_v}{E_i}$ dove E_i è l'energia cinetica iniziale dei due corpi prima dell'urto mentre E_v rappresenta l'energia associata alla vibrazione dei due corpi dopo l'urto. Rammentiamo che le definizioni "classiche"

del coefficiente di restituzione risalgono a Newton, come rapporto tra la velocità dopo e prima l’impatto, e a Poisson, come rapporto tra le corrispondenti quantità di moto. Ipotizzando che la durata dell’urto sia relativamente lunga confrontata con il periodo dei modi principali dei due corpi, possiamo ottenere informazioni precise sulla dinamica dell’urto centrale semplicemente basandoci solo sulle leggi di conservazione; quando invece, durante la fase di urto, si innescano nei corpi coinvolti dei moti vibratorii, parte dell’energia cinetica sarà trasformata in calore ed in emissione sonora nella fase successiva all’urto. Da qui nasce la necessità di tenere conto di tali fenomeni vibratorii nella valutazione del coefficiente di restituzione.

In questo studio si è fatto riferimento ad urti di tipo lineare–elastico, e la schematizzazione da noi adottata per descriverli è quella classica dell’urto centrale tra due corpi.

Il lavoro si compone di cinque sezioni. Nelle prime due si articolano l’introduzione e i riconoscimenti alla letteratura. Nella terza parte si analizza l’urto centrale di due generici sistemi elastici (con modi ortogonali) considerando due “casi limite” notevoli. Nella quarta parte si elabora un modello per le simulazioni e si descrive il’apparato sperimentale per la validazione di tale modello. L’ultima parte contiene le prove sperimentali e le simulazioni che hanno permesso di validare i modelli impiegati.

2. RICONOSCIMENTI ALLA LETTERATURA

A parte i classici trattati sulla dinamica dell’urto tra corpi di diversa natura, [1], diversi studi recenti sono dedicati alla collisione di corpi elastici o di insiemi di corpi rigidi collegati fra loro elasticamente. Rimarchiamo la sostanziale differenza tra l’usuale modello di urto e la conseguente definizione di coefficiente di restituzione e il fenomeno di dissipazione dell’energia meccanica che consideriamo in questo lavoro.

Il diverso approccio consiste nei diversi frangenti in cui avviene il degrado dell’energia meccanica: nel modello classico di urto tale evenienza è dovuta, in generale, alla deformazione elasto–plastica di alcune parti dei corpi coinvolte nel contatto. Nel nostro caso, invece, siamo interessati a quei fenomeni di urto in cui la conversione di energia meccanica in energia termica e sonora si svolge anche a contatto terminato, ed è dovuta al fatto che l’energia associata alle vibrazioni dei solidi o dei sistemi elastici coinvolti viene via via dissipata. Possiamo dividere gli studi più recenti riguardanti questo tema in due grossi filoni che, a nostro avviso, solo apparentemente appartengono ad aree culturali diverse. I lavori citati in bibliografia [2], [3], [4], [5] sono stati svolti nell’ambito di ricerche ingegneristiche di meccanica, mentre i lavori [6], [7], [8] sono svolti nell’ambito della fisica teorico–sperimentale. Gli studi svolti nell’ambito della meccanica applicata si concentrano prevalentemente sulla possibilità di mettere a punto modelli numerici adatti per la simulazione del fenomeno tramite calcolatore. Un esempio significativo è contenuto in [2] in cui un treno di masse collegate tra loro da molle e smorzatori viene studiato tramite l’analisi modale. L’equazione del moto in coordinate modali viene quindi impiegata per le simulazioni che vedono la massa n -esima urtare contro un bersaglio fisso. L’accento è dunque posto sulla possibilità di modellare l’urto di sistemi a molti gradi di libertà tramite il coefficiente di restituzione “classico”, il quale assume in questa circostanza un significato diverso da quello che introdurremo nel presente lavoro. L’impostazione matematica contenuta in [2] costituirà comunque la base per le simulazioni numeriche elaborate nel presente studio.

Da un punto di vista leggermente diverso, l’approccio contenuto in [7] mette in luce

importanti caratteristiche che presenta un oscillatore unidimensionale modellato con un numero variabile ma finito di gradi di libertà. In questo lavoro si pensa ancora ad una catena elastica del tutto simile al treno di masse e molle di [2], dove però mancano gli smorzatori, che urta un bersaglio perfettamente elastico. L'assenza degli elementi smorzanti ha due cause distinte: la prima motivazione è legata al particolare settore a cui l'articolo citato appartiene, infatti l'articolo vuole porre in evidenza proprio un diverso meccanismo di degrado dell'energia che viene "dissipata" dall'eccitazione, quasi sempre inevitabile, dei modi di vibrare a livello microscopico a spese dell'energia legata ai modi di vibrare macroscopici; la seconda è che la caratteristica che si vuole mettere in luce, cioè il coefficiente di restituzione dipendente dal rapporto tra le due energie cinetiche traslazionali prima e dopo l'urto, sembra essere indipendente dal fenomeno di assorbimento intrinseco di energia dovuto ad inelasticità di qualche parte del solido. Accogliamo quest'ultima motivazione, quindi nel proseguo del lavoro eviteremo di appesantire i modelli trattati inserendo elementi smorzanti.

3. DUE CASI NOTEVOLI

Un modello per lo studio del coefficiente di restituzione nei fenomeni d'urto che coinvolgono oggetti con elasticità interna significativa consta, come già accennato nel precedente paragrafo, di un "treno" di masse e di molle che, muovendosi con velocità costante v incontrano un ostacolo fisso, o una massa molto maggiore della massa totale del treno elastico urtante. La figura 1 riporta quanto appena descritto.

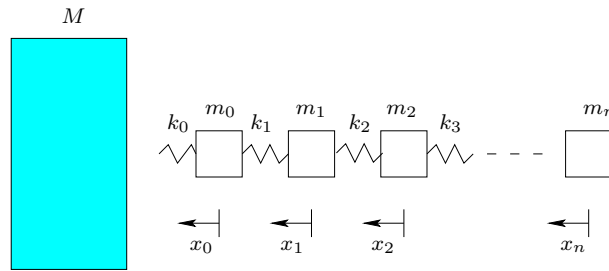


Figura 1: Rappresentazione schematica del treno elastico urtante.

È appena il caso di richiamare la classica nozione dell'urto centrale tra due corpi uno di massa M fermo ed uno di massa m che collide con il primo a velocità v . Come è noto, prendendo una coordinata con lo zero nel centro di massa di questo sistema, il quale si muove, rispetto alla massa ferma M , con velocità $u = vm/(m + M)$, e supponendo che l'urto sia perfettamente elastico, le velocità della massa m , dopo l'urto, sarà data da $v'_m = -vM/(M+m)$, mentre la velocità della massa M sarà $v'_M = vm/(M+m)$. Tornando al sistema di riferimento in quiete si ha $v_m = -v(M - m)/(M + m)$ e $v_M = 2vm/(M + m)$. È chiaro che per $M \gg m$ vale il seguente limite $v'_M = v_M = 0$ e $v'_m = v_m = -v$.

Con queste premesse e con riferimento alla figura 1 consideriamo tre configurazioni:

1. k_i confrontabili, m_i , confrontabili, ($i = 0, 1, 2, 3 \dots, n$);
2. $k_0 \gg k_i$, $m_0 > \sum_{i=1}^n m_i$, ($i = 1, 2, 3 \dots, n$);
3. $k_0 \gg k_i$, $m_0 = m_i = \mu$, $k_i = \kappa$, ($i = 1, 2, 3 \dots, n$);

in tutti i casi $M \gg m_i$, ($i = 0, 1, 2, 3 \dots, n$). Si nota che dallo studio del caso 1) si potrebbero trarre informazioni utili anche per i casi 2) e 3), i quali si presentano come casi limite del primo. Sfortunatamente per il caso più generale 1) non sono disponibili soluzioni analitiche esplicite, quindi non sono disponibili indicazioni generali che consentano semplici estensioni agli altri due casi. Il primo caso sarà ampiamente trattato nel prossimo paragrafo 4. dedicato alle simulazioni ed alle prove sperimentali. I casi 2) e 3), che presentano situazioni “limite”, meritano in questo stesso paragrafo una discussione particolare.

A completamento delle ipotesi sin qui introdotte segnaliamo che la scelta di non considerare gli smorzatori nel modello matematico è giustificata anche dal fatto che il tempo caratteristico, in cui si verifica il contatto dovuto all’urto, è da ritenersi molto breve confrontato con il periodo di oscillazione dei primi modi del sistema. Si suppone perciò che gli smorzatori eventuali non dissipino una quantità apprezzabile di energia durante il periodo di contatto. Terminata la fase di contatto la situazione energetica sarà univocamente determinata e il contenuto energetico dei modi di vibrare, tranne quello del modo a frequenza zero, verrà sicuramente dissipato in calore.

3.1. caso 2)

Siamo nella situazione in cui un corpo di massa m_0 rilevante è vincolato elasticamente ad altre masse di minor importanza. L’urto avviene tramite la molla k_0 che schematizza l’elasticità del contatto. Dalle ipotesi $m_0 > \sum_{i=1}^n m_i$, $k_0 \gg k_i$, ($i = 1, 2, 3 \dots, n$), per le velocità, espresse tramite le coordinate fisiche, prima e dopo l’urto otteniamo $\dot{\mathbf{x}}_i = (1, 1, 1, \dots, 1)^t$ e $\dot{\mathbf{x}}_f = (-1, 1, 1, \dots, 1)^t$. Le ipotesi fatte assicurano che il vettore $\dot{\mathbf{x}}_f$ sarà sufficiente ad allontanare definitivamente il corpo urtante dal bersaglio.

Avremo per il coefficiente di restituzione $\eta = \frac{E_{B_i}}{E_{B_f}}$, dove con E_{B_i} si è indicata l’energia cinetica del modo di corpo rigido prima dell’urto e con E_{B_f} si è indicata l’energia dello stesso modo dopo l’urto. Avremo che le velocità, prima e dopo l’urto, del baricentro del corpo urtante saranno

$$v_{B_i} = 1, \quad v_{B_f} = \frac{m_0 - \sum_{i=1}^n m_i}{\sum_{i=0}^n m_i},$$

quindi per il coefficiente di restituzione ponendo $m_a = \sum_{i=1}^n m_i$ abbiamo

$$\eta = \frac{\left(m_0 - \sum_{i=1}^n m_i\right)^2}{\left(\sum_{i=0}^n m_i\right)^2} = \frac{(m_0 - m_a)^2}{(m_0 + m_a)^2}. \quad (1)$$

In figura 2 viene riportato il coefficiente di restituzione fornito dalla 1 al variare del rapporto tra le masse m_0/m_a . Questo andamento del coefficiente di restituzione, valido fino a che la massa m_0 è maggiore della somma delle altre masse, oltre ad essere significativo per i casi pratici a cui può essere effettivamente applicato, mette in luce la possibilità concreta che vi siano dei sistemi elastici che nell’urto perdono completamente la loro energia di modo di corpo rigido, con conseguente coefficiente di restituzione nullo.

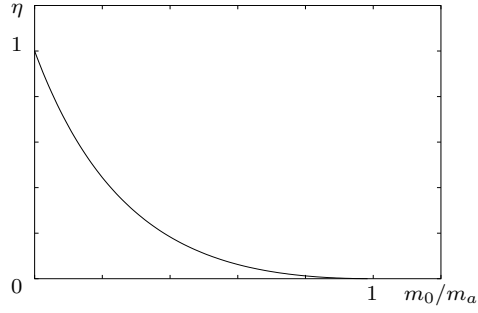


Figura 2: Coefficiente di restituzione al variare di m_0/m_a .

3.2. caso 3)

Questo modello è studiato in [7]. Un solido unidimensionale uniforme viene schematizzato tramite un treno elastico di particelle di uguale massa connesse da molle di uguale rigidità. Tale schematizzazione può ben rappresentare tutte le situazioni pratiche in cui barre di materiale elastico, come barre di acciaio o di altri metalli, subiscono urti assiali durante i loro processi produttivi, oppure a livello di semilavorati (es. nella fabbricazione di barre trafilate, perni, chiodi ecc.). In [7] si chiama “limite termodinamico” la circostanza per la quale, indicando con $M_T = \sum_{i=0}^n m_i$ la massa totale della barra urtante e con K la sua costante elastica, si ha $n \rightarrow \infty$, $M_T = nm_i$, e $K = k_i/n$.

Uno dei risultati notevoli della simulazione numerica, da noi riproposta, consta nel fatto che nel limite termodinamico si ha $\eta = 1$, ovvero non si riscontrano dissipazioni di energia se un solido monodimensionale omogeneo urta un ostacolo rigido. Le simulazioni numeriche danno un’indicazione di come varia il coefficiente di restituzione η al variare di n . Nella figura 3 è riportato su assi “log-log” lo scostamento dall’unità del coefficiente di restituzione, $1 - \eta$. Notiamo che già per $n = 50$ il coefficiente di restituzione è confinato attorno all’unità. Le due linee sono il limite superiore ed inferiore dove si trovano i risultati delle simulazioni. Tali limiti indicativi dell’andamento dell’energia che rimane intrappolata nei modi di vibrare dopo l’urto.

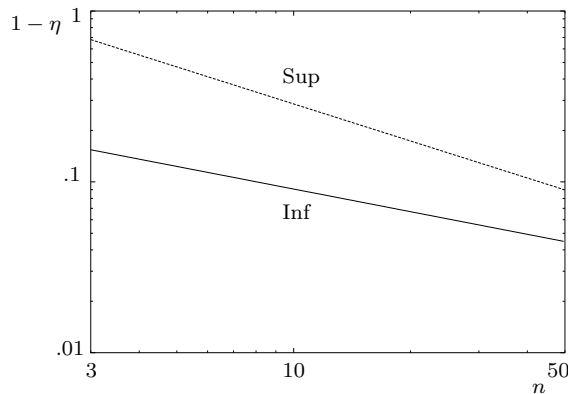


Figura 3: Scostamento del coefficiente di restituzione dall’unità al variare di n .

4. SIMULAZIONI NUMERICHE E PROVE SPERIMENTALI

In questo paragrafo illustriamo il modello per le simulazioni numeriche e descriviamo l'apparecchiatura sperimentale per la sua validazione. Le simulazioni e le rispettive prove sperimentali si riferiscono al caso 1) descritto nel paragrafo precedente. Infatti, nel caso in cui le k_i e le m_i siano tra loro confrontabili, una tecnica per approssciare il problema è quella di studiare numericamente l'evoluzione del sistema. Indichiamo con \mathbf{x}_c la posizione per il corpo urtante in cui la massa m_0 è a contatto con il bersaglio, mentre le altre molle sono indeformate, in particolare x_c rappresenterà il valore della coordinata x_0 nella situazione in cui la massa m_0 urta il bersaglio. Studiamo il sistema riportato in figura 1 seguendo [2] e [7]. Possiamo scrivere l'equazione del moto

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0, \quad x_0 < x_c. \quad (2)$$

Le matrici \mathbf{M} e \mathbf{K} saranno tali per cui

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^t \mathbf{K} \mathbf{x}, \quad (3)$$

rappresenti la lagrangiana del particolare sistema urtante studiato. La simulazione numerica può procedere nel modo seguente: fissate le condizioni iniziali prima dell'urto $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c$ e $\dot{\mathbf{x}} = (1, 1, 1, \dots, 1)^t$, si suppone che per la prima massa m_0 ci sia un'istantanea inversione di velocità con $\dot{\mathbf{x}} = (-1, 1, 1, \dots, 1)^t$. Durante lo sviluppo della simulazione con passo temporale opportunamente piccolo, si controlla la coordinata x_0 e nel caso $x_0 = x_c$ si individuano una successione di istanti di tempo t_h in cui avvengono gli urti. Ad ogni nuovo t_h si procede ad una nuova applicazione delle condizioni iniziali in cui il vettore posizione sarà $\mathbf{x}_{h^-} = \mathbf{x}_{h^+}$ ed il vettore velocità $(x_{0_{h^-}}, x_{1_{h^-}}, \dots, x_{n_{h^-}})^t = (-x_{0_{h^+}}, x_{1_{h^+}}, \dots, x_{n_{h^+}})^t$. Nel nostro caso il sistema vibrante che urta un bersaglio fisso è una trave molto flessibile sulla quale vengono posti, oltre la strumentazione necessaria per l'acquisizione delle grandezze da misurare, opportuni cavalieri di massa nota in modo tale che, dal punto di vista dinamico, la trave stessa possa essere descritta come un certo numero di spezzoni rigidi che collegano le masse puntiformi coincidenti con altrettante cerniere. Nelle cerniere viene idealizzata l'elasticità della trave continua e rappresentata tramite opportune molle. In 4 è riportato lo schema appena descritto dal quale si desume che tutto quanto sin ora detto circa la coordinata x_0 vale per la coordinata x_{n-1} ; allo stesso modo la molla che schematizza il contatto è ora k_n .

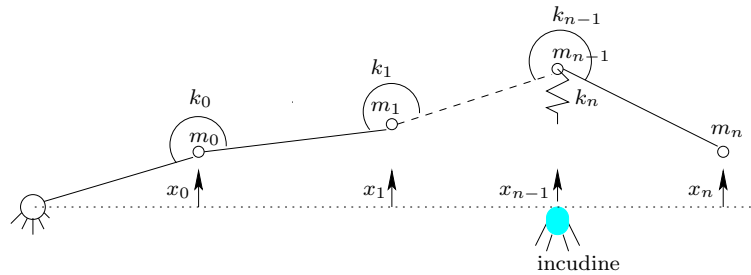


Figura 4: Modello per la simulazione numerica.

Per quanto riguarda l'apparato sperimentale riportiamo di seguito sia un disegno schematico che mostra anche la sensoristica, sia le fotografie del setup sperimentale.

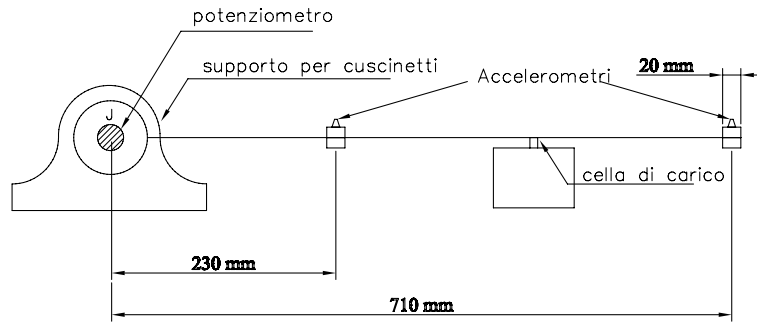


Figura 5: Schema dell'apparato sperimentale con sensoristica.

Le prove sono state eseguite facendo variare le masse da 0.3 a 0.6 kg. Dato il valore delle accelerazioni in gioco nel caso di contatto metallo-metallo, sulle masse sono stati fissati gli accelerometri (B&K M350A14) che presentano fondo scala $a_{\max} = 5000g$. Impostando opportunamente il guadagno, tali accelerometri permettono di leggere accelerazioni fino ad $a = 500g$. Il guadagno della cella di carico è stato impostato a 1; i valori delle forze misurate possono presentare picchi che superano i 300 N. In alcune prove è stato interposto uno strato di gomma tra incudine e trave: in questo modo è possibile stabilire l'entità dell'influenza del valore della molla k_n . Le figure 6 mostra l'apparecchiatura sperimentale e il dettaglio del perno con potenziometro torsionale.

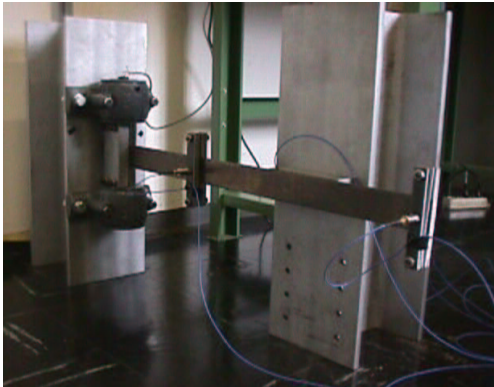


Figura 6: Apparato sperimentale con particolare del perno.

5. RISULTATI E CONCLUSIONI

Le simulazioni e le prove sperimentali che riportiamo sono state eseguite per un numero di cavalieri, quindi di masse pari a 12; tali masse sono uguali fra loro. Fa eccezione la massa m_n la quale è stata fatta variare con continuità in una delle prove. Lo scopo di queste prove sperimentali non consiste nella determinazione diretta del coefficiente di restituzione, legato ad un particolare caso. Queste prove hanno il precipuo scopo di validare il modello impiegato nelle simulazioni; in particolare hanno il compito di verificare quanto segue

1. prima che avvenga il rimbalzo definitivo si verifica, in generale, un certo numero di contatti;
2. il tempo in cui avviene il singolo contatto è brevissimo confrontato con il periodo dei primi modi di vibrare;
3. l'andamento di tutto il fenomeno è scarsamente influenzato dalla costante elastica del contatto cioè, con riferimento alla 1, la determinazione esatta di k_0 non conta.

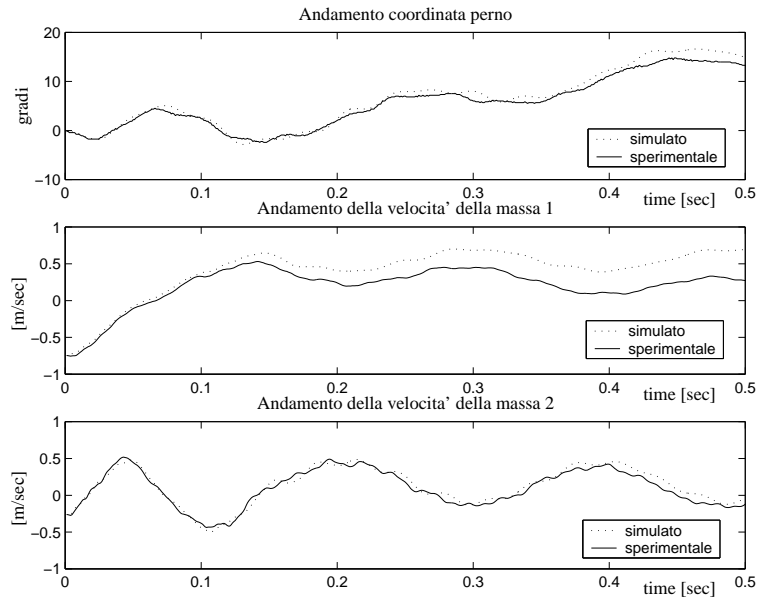


Figura 7: Confronto tra prova sperimentale e simulazione; le masse fissate alla trave sono uguali tra loro e pari a 0.6 kg ; presenza di cuscinetto in gomma sull'incudine.

Le figure 7 e 8 riportano la simulazione e la prova sperimentale riguardanti la configurazione che vede masse fissate alla trave uguali tra loro e pari a 0.6 kg , oltre alla presenza di cuscinetto in gomma sull'incudine. In particolare la figura 7 riporta l'andamento nel tempo di alcune coordinate significative. Per esempio, la coordinata rotazionale del perno, acquisita tramite un potenziometro di precisione, fornisce un'ottima validazione del modello impiegato per le simulazioni. La figura 8 riporta l'andamento della forza di contatto tra trave e incudine in presenza, come già accennato, di una molla in gomma. Il confronto tra simulazione ed esperimento mostra anche qui un buon accordo. In particolare si può mettere in evidenza la molteplicità dei contatti e il fatto che ogni singolo contatto ha una durata breve se confrontata con il periodo dei primi modi propri di vibrare.

Le figure 9 e 10 riprendono simulazioni ed esperimenti delle 7 e 8 rispettivamente, in assenza del cuscinetto in gomma tra trave ed incudine. Anche in questo caso valgono le considerazioni fatte in precedenza. Una notevole, anche se apparente, differenza si nota tra esperimento e simulazione della forza acquisita in figura 10. Infatti quando k_n è data dal contatto acciaio-acciaio si notano delle vibrazioni ad alta frequenza che sono assenti nelle simulazioni. La presenza di tali frequenze, non altera l'andamento complessivo del fenomeno di rimbalzo, in particolare non altera il modo in cui i modi di vibrare scambiano energia e quantità di moto con l'ostacolo. Questo risulta dal fatto che la durata della fase

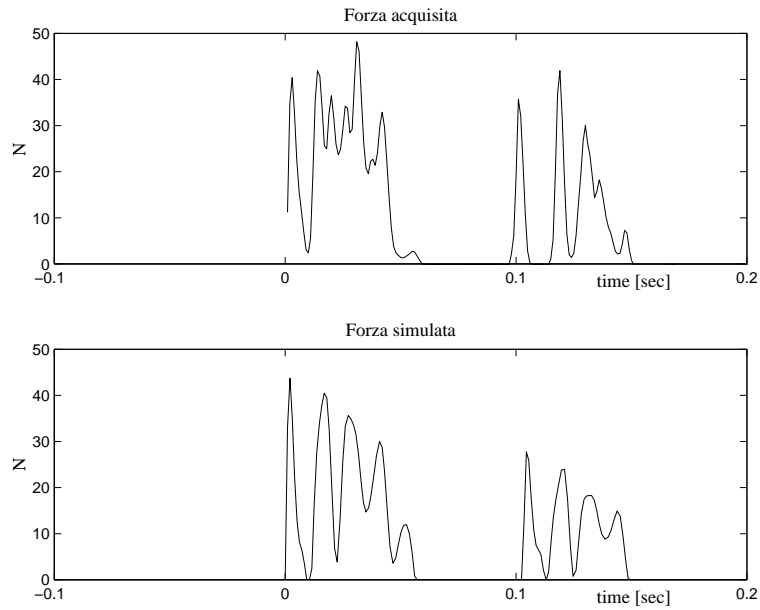


Figura 8: Forze scambiate durante la fase di urto; le masse fissate alla trave sono uguali tra loro e pari a 0.6 kg ; presenza di cuscinetto in gomma sull'incudine.

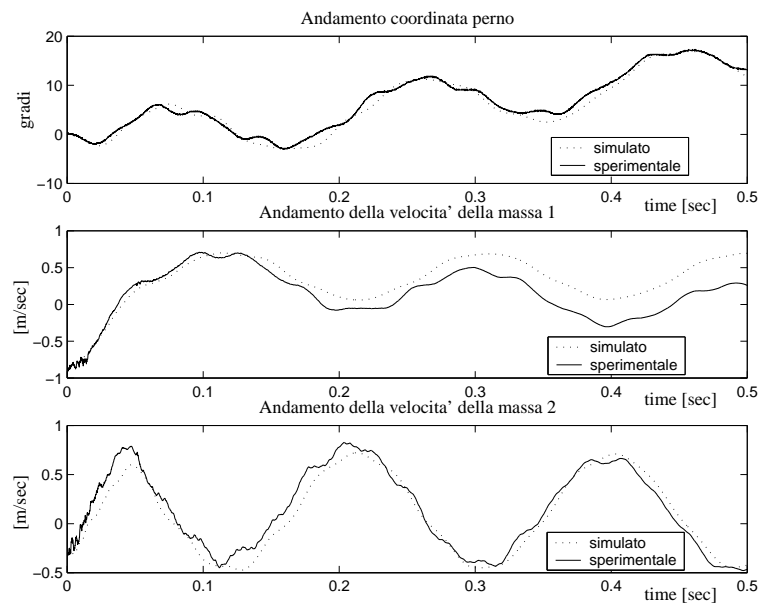


Figura 9: Confronto tra prova sperimentale e simulazione; le masse fissate alla trave sono uguali tra loro e pari a 0.6 kg ; assenza di cuscinetto in gomma sull'incudine.

di urto simulata coincide con quella acquisita, e che gli integrali dei due grafici sono confrontabili. Affermiamo quindi che la conoscenza dell'esatto valore di rigidità da attribuire al contatto ha scarsa importanza.

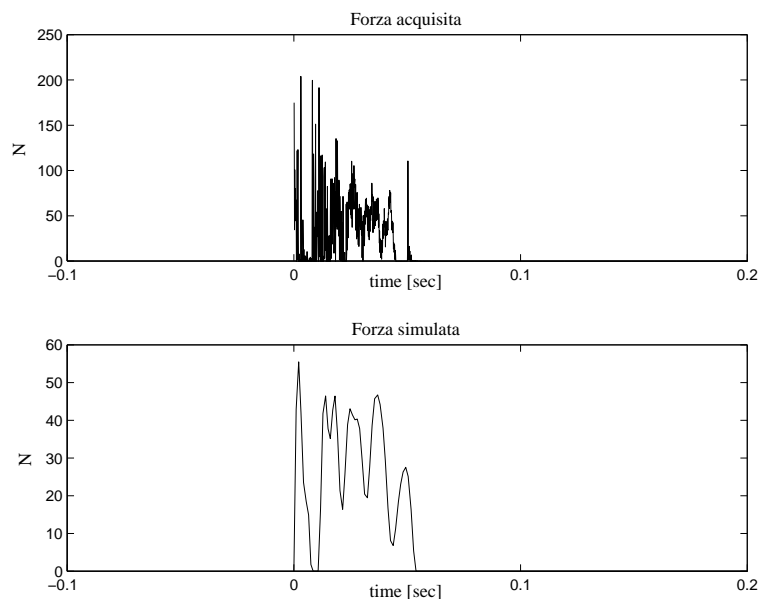


Figura 10: Forze scambiate durante la fase di urto; le masse fissate alla trave sono uguali tra loro e pari a 0.6 kg ; assenza di cuscinetto in gomma sull'incudine.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Goldsmith, "Impact", Edward Arnold Publishers Ltd. London.
- [2] Wagg,D.J., and Bishop,S.R., *A Note on Modelling Multi-Degree-of-Freedom Vibro-Impact Systems Using Coefficient of Restitution Models*, 236(1), 176–184, Journal of Sound and Vibration, 2000.
- [3] Stoianovici,D. Hurmuzlu,Y., *A Critical Study of the Applicability of Rigid-Body Collision Theory*, Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics, June 1996, Vol.63/307.
- [4] Hurmuzlu,Y., *An Energy-Based Coefficient of Restitution for Planar Impacts of Slender Bars With Massive External Surfaces*, Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics, December 1998, Vol.65/953.
- [5] Smith,E.C., Liu,P.P., *Coefficients of Restitution*, Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics, December 1992, Vol.59/963
- [6] Falcon,E., Laroche,C., Fauve,S., Coste,C., *Collision of a 1-D column of beads with a wall*, The European Physical Journal B, 5, 111–131, 1998.
- [7] Basile,A.,G., Dumont,R.,S., *Coefficient of restitution for one-dimensional harmonic solids*, The American Physical Society, Physical Review E, Vol.61, No.2, February 2000.
- [8] Pöschel,T., and Brilliantov,N.,V., *Extremal collision sequences of particles on a line: Optimal transmission of kinetic energy*, The American Physical Society, Physical Review E, Vol.63, 021505, 2001.